



Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького  
Факультет інформатики, математики та економіки  
Кафедра математики і фізики



<b>Назва курсу</b>	Лінійні оператори в гільбертових просторах
<b>Викладач</b>	Фоменко В.Г., старший викладач, кандидат фізико-математичних наук
<b>Профайл викладача</b>	<a href="http://fim.mdpu.org.ua/fakultet-informatiki-matematiki-ta/kafedra-matematiki-i-fiziki/sklad-kafedrimatematiki-i-fiziki/fomenko-volodymyr-gennadijovych/">http://fim.mdpu.org.ua/fakultet-informatiki-matematiki-ta/kafedra-matematiki-i-fiziki/sklad-kafedrimatematiki-i-fiziki/fomenko-volodymyr-gennadijovych/</a>
<b>Е-mail викладача</b>	fomenko.vladymyr@gmail.com
<b>Сторінка курсу в ЦОДТ МДПУ</b>	<a href="https://dfn.mdpu.org.ua/course/view.php?id=3762">https://dfn.mdpu.org.ua/course/view.php?id=3762</a>
<b>Консультації</b>	<i>Очні консультації:</i> щовівторка, з 12 <sup>30</sup> до 13 <sup>30</sup> , аудиторія № 65. <i>Онлайн-консультації:</i> через систему ЦОДТ МДПУ імені Богдана Хмельницького

## 1. Коротка анотація до курсу

Курс знайомить з основами математичної теорії лінійних операторів в гільбертовому просторі. Гільбертов простір – це узагальнення поняття скінченно-вимірного простору на випадок нескінченної вимірності, а лінійний оператор – це лінійне перетворення такого простору. Лінійний оператор є основним поняттям математики і широко застосовується як в математиці, так і в сучасній теоретичній фізиці.

**Для оволодіння дисципліною необхідно пройти курси:**

- лінійна алгебра;
- аналітична геометрія
- математичний аналіз.

**Після закінчення курсу студент набуває навиків:**

- застосовувати основні поняття і теореми в рамках курсу;
- вміти обчислювати основні характеристики математичних об'єктів, пов'язані з лінійними просторами і операторами;
- вміти застосовувати теорію лінійних операторів к аналізу диференціальних рівнянь.

**Мета курсу** – створення основи теоретичної підготовки бакалаврів для оволодіння фундаментальними математичними і фізичними законами і формування сучасного наукового світогляду.

**Цілі курсу** – навчити студентів методам теорії гільбертових просторів; вивчити поняття лінійного оператора, спряженого та самоспряженого оператора, спектру оператора; розглянути основні приклади лінійних операторів, які використовуються в фізиці - оператори Гамільтона, Лапласа, Шредингера тощо.

## 2. Формат курсу

**Очний (offline)** у вигляді лекційних, практичних занять та самостійної роботи.

**Змішаний (blended)** через систему Центру освітніх дистанційних технологій МДПУ імені Богдана Хмельницького

## 3. Компетентності та результати навчання

**ЗК-1.** Здатність до абстрактного мислення, критичного аналізу та синтезу, оцінювання сучасних наукових досягнень, генерування нових ідей при вирішенні дослідницьких і практичних завдань.

**ЗК-5.** Здатність до нестандартного розв'язання задач, самостійності міркувань та умовиводів, навички інтелектуального пошуку, вміння виявляти та розв'язувати проблеми.

**ФК-1.** Здатність аналізувати та математично моделювати різноманітні процеси і явища, досліджувати відповідні моделі та інтерпретувати одержані результати.

**ФК-3.** Здатність до розв'язання прикладних задач за допомогою розділів вищої математики.

**ФК-11.** Здатність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики.

**ФК-12.** Здатність обирати адекватні методи для ефективного вирішення конкретних науково-практичних задач у галузі математики і фізики.

**РН-3.** Застосовувати спеціалізовані знання для розуміння наукової літератури за обраними предметними спеціальностями та готувати до опублікування статті за результатами проведених досліджень з математики, фізики або методики їх викладання.

**РН-8.** Будувати математичні моделі для розв'язання прикладних задач.

**РН1-4.** Демонструвати та застосовувати знання з математики, фізики та методики їх викладання.

#### 4. Обсяг курсу

Вид заняття	Загальна кількість годин (4 кредити)
Лекції	30 годин
Практичні заняття	14 годин
Самостійна робота	76 годин

#### 5. Ознаки курсу

Рік викладання	Семестр	Спеціальність	Курс	Нормативний\вибірковий
2023-2024 н.р.	5, 7	014.04 Середня освіта (Математика)	3, 4 курс бакалавр	вибірковий

## 6. Технічне й програмне забезпечення / обладнання

Технічне та мультимедійне обладнання, підручники, посібники, довідники, методичні рекомендації до семінарських завдань. Забезпечення доступу здобувачів вищої освіти до Інтернет-ресурсів.

## 7. Політика курсу

Політика академічної поведінки та етики:

- Відвідування лекційних занять і опрацювання їх матеріалів.
- Виконання завдань практичних занять і опрацювання питань самостійної роботи.
- Виконання контрольних-модульних завдань.

## 8. Схема навчальної дисципліни

I семестр			
Тиждень\ години	Тема і план заняття	Форма заняття	Література
<b>1 тиждень</b> <b>4 години</b>	<b>Модуль 1. Гільбертові простори.</b>  Тема 1. <b>Векторна алгебра.</b> Основні операції з векторами та їх властивості.  Тема 2. <b>Базис векторного простору.</b> Базис векторного простору. Ортонормований базис. Координати вектора.	Лекція  Лекція	1, 2  1, 2

<p><b>2 тиждень</b> <b>4 години</b></p>	<p><b>Тема 3. Скалярний добуток векторів.</b> Скалярний добуток векторів та його властивості. Теорема косинусів. Теорема Піфагора.</p> <p><b>Тема 4. Векторний добуток векторів.</b> Векторний добуток векторів та його властивості. Обчислення площ та об'є мів за допомогою векторного та змішаного добутків векторів.</p>	<p>Лекція</p> <p>Практичне заняття.</p>	<p>1, 2, 12</p>
<p><b>3 тиждень</b> <b>2 години</b></p>	<p><b>Тема 5. Основні поняття теорії лінійних просторів.</b> Означення лінійного простору. Аксіоми лінійного простору.</p>	<p>Лекція</p>	<p>1, 2, 3, 4</p>
<p><b>4 тиждень</b> <b>4 години</b></p>	<p><b>Тема 6. Лінійні простори.</b> Приклади лінійних просторів.</p> <p><b>Тема 7. Лінійні простори.</b> Означення лінійного підпростору. Приклади лінійних підпросторів.</p>	<p>Лекція</p> <p>Практичне заняття</p>	<p>1, 2, 3, 4</p>
<p><b>5 тиждень</b> <b>2 години</b></p>	<p><b>Тема 8. Лінійна залежність та незалежність векторів.</b> Означення лінійної залежності та незалежності векторів. Приклади лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.</p>	<p>Лекція</p>	<p>1, 2, 3, 4</p>
<p><b>6 тиждень</b> <b>4 години</b></p>	<p><b>Тема 9. Базис лінійного простору.</b> Означення базису лінійного простору. Вимірність лінійного простору. Ізоморфізм лінійних просторів.</p> <p><b>Тема 10. Базис лінійного простору.</b> Приклади базисів лінійних просторів.</p>	<p>Лекція</p> <p>Практичне заняття</p>	<p>1, 2, 3, 4</p>

<b>7 тиждень</b> <b>2 години</b>	Тема 11. <b>Евклідові простори і нормовані простори.</b> Скалярний добуток векторів. Означення і приклади евклідових просторів. Ортогональність векторів. Норма. Означення і приклади нормованих просторів.	Лекція	1, 2, 3, 4
<b>8 тиждень</b> <b>4 години</b>	Тема 12. <b>Основні поняття теорії гільбертових просторів.</b> Фундаментальна послідовність. Повнота. Означення гільбертового простору. Гільбертові простори $l_2$ та $L_2$ .  <b>Підсумковий модульний контроль 1.</b>	Лекція  Практичне заняття	1, 2, 3, 4
<b>9 тиждень</b> <b>2 години</b>	<b>Модуль 2. Лінійні оператори.</b>  Тема 14. <b>Основні поняття теорії лінійних операторів.</b> Означення лінійного оператора. Приклади лінійних операторів.	Лекція	1, 2, 3, 4
<b>10 тиждень</b> <b>4 години</b>	Тема 15. <b>Основні поняття теорії лінійних операторів.</b> Матриця лінійного оператора та її властивості.  Тема 15. <b>Основні поняття теорії лінійних операторів.</b> Композиція операторів. Матриця композиції операторів.	Лекція  Практичне заняття	1, 2, 3, 4
<b>11 тиждень</b> <b>2 години</b>	Тема 17. <b>Основні поняття теорії лінійних операторів.</b> Ядро лінійного оператора. Ранг лінійного оператора. Обернений оператор. Розв'язання рівняння $Ax = y$ .	Лекція	2, 3, 4, 5
<b>12 тиждень</b> <b>4 години</b>	Тема 18. <b>Основні поняття теорії лінійних операторів.</b> Означення обмеженого (неперервного) оператора. Необмежені лінійні оператори.  Тема 19. <b>Власні значення та власні вектори лінійного оператора.</b> Власні значення та власні вектори лінійного оператора.	Лекція  Практичне заняття	3-11

	Приклади обчислення власних чисел лінійного оператора.		
<b>13 тиждень</b> <b>2 години</b>	Тема 20. <b>Спряжені та самоспряжені оператори.</b> Означення спряженого оператора. Симетричні оператори. Самоспряжені оператори.	Лекція	1, 2, 3, 4
<b>14 тиждень</b> <b>4 години</b>	Тема 21. <b>Резольвента та спектр лінійного оператора.</b> .Резольвента лінійного оператора. Спектр лінійного оператора. Спектр самоспряженого оператора  <b>Підсумковий модульний контроль 2.</b>	Лекція   Практичне заняття	3-11

**Матеріали до занять:** презентації, відеоматеріали.

**Завдання на кожен тиждень:** опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до практичного заняття, виконати завдання для самостійної роботи відповідно до номеру теми:

<https://dfn.mdpu.org.ua/course/view.php?id=3762170>

## 9. Система оцінювання та вимоги

Методи контролю результатів навчання: поточний контроль здійснюється у формі усних відповідей на семінарських заняттях; виконання тестових та творчих завдань; розв'язування ситуаційних задач. Підсумковий контроль – у формі заліку.

Система оцінювання результатів навчальних досягнень здобувачів вищої освіти на ОП Середня освіта (Математика) базується на «Положенні про організацію освітнього процесу в Мелітопольському державному педагогічному університеті імені Богдана Хмельницького» (протокол від 20.09.2019 р. № 3) і «Положенні про бально-накопичувальну систему оцінювання навчальних досягнень» (від 28.11.2017 р., протокол №7), що затверджені Вченою радою МДПУ імені Богдана Хмельницького.

Контроль за видами діяльності здобувачів вищої освіти здійснюється шляхом поточного оцінювання знань (усні відповіді, тестові завдання, перевірка практичних завдань, самостійної роботи), періодичним контролем по тестах або контрольних робіт за матеріалами двох блоків. За результатами суми балів поточного оцінювання та двох періодичних контрольних робіт (ПКР) виставляється підсумкова оцінка за національною, 100-бальною шкалами і ECTS.

За семестр з курсу дисципліни проводяться два періодичних контролю (ПКР), результати яких є складовою результатів контрольних точок першої (КТ1) і другої (КТ2). Результати контрольної точки (КТ) є сумою поточного (ПК) і періодичного контролю (ПКР):  $КТ = ПК + ПКР$ . Максимальна кількість балів за контрольну точку (КТ) складає **50 балів**. Максимальна кількість балів за періодичний контроль (ПКР) становить 60 % від максимальної кількості балів за контрольну точку (КТ), тобто **30 балів**. А 40 % балів, тобто решта балів контрольної точки, є бали за поточний контроль, а саме **20 балів**. Результати поточного контролю обчислюються як середньозважена оцінок ( $X_{cp}$ ) за діяльність студента на практичних (семінарських) заняттях, що входять в число певної контрольної точки. Для трансферу середньозваженої оцінки ( $X_{cp}$ ) в бали, що входять до 40 % балів контрольної точки (КТ), треба скористатися формулою:  $ПК = (X_{cp}) * 20 / 5$ . Таким чином, якщо за поточний контроль (ПК) видів діяльності студента на всіх заняттях  $X_{cp} = 4.1$  бали, які були до періодичного контролю (ПКР), то їх перерахування на 20 балів здійснюється так:  $ПК = 4.1 * 20 / 5 = 4.1 * 4 = 16.4 // 16$  (балів). За періодичний контроль (ПКР) студентом отримано 30 балів. Тоді за контрольну точку (КТ) буде отримано  $КТ = ПК + ПКР = 16 + 30 = 46$  (балів).

Студент має право на підвищення результату тільки одного періодичного контролю (ПКР) протягом двох тижнів після його складання у випадку отримання незадовільної оцінки.

#### **Критерії оцінювання: форма контролю – залік.**

Підсумковим контролем є залік, який виставляється за результатами суми балів поточного оцінювання та двох періодичних контрольних робіт (ПКР), коли студент набрав не менше 60 балів, за національною, 100-бальною шкалами і ECTS.

### **10. Критерії оцінювання знань і вмінь студентів**

<b>Методи контролю результатів навчання</b>	<b>Максимальна кількість балів та вимоги до їх накопичення</b>
Усна відповідь на практичному занятті	1-2 бали – за відповідь з принциповими помилками, що свідчать про нерозуміння студентом сутності питання; 3 бали – за відповідь з помітними помилками, вадами засвоєння, але такими, що не перешкоджають подальшому навчанню; 4 – за відповідь із незначними помилками; 5 – за повну відповідь, логічно виважену, правильну за змістом.



Індивідуальне опитування, доповіді	1-2 бали – за доповідь, що не розкриває змісту теми і містить суттєві помилки; 3 бали – за доповідь, що частково розкриває зміст теми з помітними помилками, але такими, що не перешкоджають усвідомленню суті питання; 4-5 балів – за достатньо повне розкриття змісту теми.
Компетентісно-орієнтовані завдання	1-2 бали – за виконання завдань із суттєвими помилками; 3 бали – за виконання завдань з помітними помилками, але такими, що не перешкоджають усвідомленню суті питання; 4 бали – за достатньо повне виконання завдань із незначними помилками; 5 балів – за повне виконання завдань без помилок.

### 11. Шкала оцінювання: національна та ECTS

Оцінка за шкалою ECTS	Оцінка за бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою	
A	90-100	відмінно	Студент виявляє всебічні, системні й глибокі знання навчального матеріалу, здатний використовувати набуті знання та вміння для прийняття рішень у нестандартних ситуаціях. Мова логічно обґрунтована і граматично правильна.
B	82-89	добре	Студент виявляє вміння самостійно та аргументовано викладати матеріал, аналізувати, робити самостійні узагальнення та висновки, правильно виконує навчальні завдання, виправляє допущені помилки, кількість яких незначна. Відповіді досить повні, логічні, з елементами самостійності, але містять деякі неточності.
C	74-81		

D	64-73	задовільно	Студент виявляє наявність знань лише основного матеріалу, відповідає по суті питання і в загальній формі розбирається у матеріалі, але відповідь не повна, нечітка, містить неточності, дає недостатньо правильні формулювання, порушує послідовність викладу матеріалу, відчуває труднощі, застосовуючи знання при розв'язанні практичних задач.
E	60-63		
FX	0-59	незадовільно з можливістю повторного складання	Студент відповідає не по суті, не може правильно розв'язати конкретну задачу, робить велику кількість помилок в усній відповіді.

## 12. Рекомендована література

### Основна

1. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Лінійна алгебра. / Львів, 2006. - 226 с.
2. Гельфанд І.М. Лекції з лінійної алгебри. / М.: МЦНМО, 1998. - 320 с.
3. Вуліх Б. З. Введення у функціональний аналіз. / М.: Наука, 1967. - 416 с.
4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теорія лінійних операторів в гільбертовому просторі. / Харків: Вища школа, 1977. - 544 с.
5. В. Хатсон, Дж. Пім. Додатки функціонального аналізу та теорії операторів. / М.: Світ, 1983. - 432 с.
6. Банах С. Курс функціонального аналізу. / Київ: Рад. школа., 1948. - 216 с.
7. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз / Львів: Вид. Чижиков І. Е., 2014. - 559 с.
8. Рудін У. Функціональний аналіз. / М.: Меркурій, 2000. - 442 с.

### Додаткова

9. Люстернік Л. А., Соболев В. И. Короткий курс функціонального аналізу. / М.: Вища школа, 1982. - 271 с.
10. Бірман М. Ш., Соломяк М.З. Спектральна теорія самоспряжених операторів в гільбертовому просторі. / Л.: Вид-во ЛДУ, 1980. - 264 с.
11. Рісс Ф., Секефальві-Надь Б. Лекції по функціональному аналізу. / М.: Світ, 1979. - 592 с.
12. Геворкян Ю.Л., Григор'єв А.Л. Скалярний і векторний аналіз для класичної інженерної освіти. / Харків, Вид-во ХПІ, 2010. - 652 с.

### 13. Інформаційні ресурси на сайті ЦОДТ

1. робоча програма;
2. методичні вказівки до практичних занять і самостійної роботи;
3. електронні версії підручників, навчальних посібників, тексти лекцій;
4. електронні версії практикумів, збірників задач і вправ:

<https://dfn.mdpu.org.ua/course/view.php?id=3762>