

Мелітопольський державний педагогічний університет
імені Богдана Хмельницького
Факультет інформатики, математики та економіки
Кафедра математики і фізики

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Лінійні оператори в гільбертових просторах

(повна назва навчальної дисципліни)

Ступінь вищої освіти перший (бакалаврський)

Галузь знань 01 Освіта/Педагогіка
(шифр і назва галузі)

Мелітополь, 2020 р.

1. Опис навчальної дисципліни

Назва навчальної дисципліни **Лінійні оператори в гільбертових просторах**

Заклад вищої освіти **Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького**

Факультет **інформатики, математики та економіки**

Кафедра **математики і фізики**

Освітньо-професійна програма вищої освіти **Середня освіта (Математика)**
другого рівня вищої освіти за спеціальністю **014.04 Середня освіта (Математика)** галузі знань **01 Освіта/Педагогіка** .

Мова навчання: **українська**

Розробник: **Фоменко В.Г., старший викладач кафедри математики і фізики, кандидат фізико-математичних наук**

«Затверджено»

На засіданні кафедри

Завідувач кафедри

_____ 2020 р.

Найменування показників	Ступінь вищої освіти галузь знань, спеціальність, спеціалізація	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 4	Ступінь вищої освіти: перший (бакалаврський) Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка Спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика) Освітньо-професійна програма: Середня освіта (Математика)	Нормативна	
Модулів – 2		Рік підготовки:	
		3-й	3-й
		Семестр	
Загальна кількість годин – 120		5-й	5-й
		Лекції	
		8 годин	10 годин
		Практичні, семінарські	
		12 годин	6 годин
		Лабораторні	
	Навчальна практика		
	Самостійна робота		
	100 годин	104 години	
	Вид контролю: залік		
Тижневих годин: аудиторних – 2 год. л., 2 год. пр., самостійної роботи студента – 9 год.			

2. Мета навчальної дисципліни

Місце дисципліни у освітній програмі: вибіркова.

Метою дисципліни є знайомство студентів з основними поняттями теорії гільбертових просторів та лінійних операторів, які діють в них.

Перелік загальних та фахових компетентностей, які набуваються під час опанування дисципліною:

ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-3. Здатність застосовувати знання на практиці.

ЗК-5. Здатність до пошуку інформації, її аналізу та критичного оцінювання.

ЗК-15. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

ФК-1. Здатність аналізувати математичну задачу, розглядати різні способи її розв'язання та демонструвати логічність у математичних міркуваннях.

ФК-3. Здатність використовувати системні знання з математичних дисциплін, педагогіки, історії їх виникнення та розвитку.

ФК-6. Здатність сформулювати проблему в математичній і символічній формі, щоб полегшити її аналіз та розв'язання; зданість обирати та використовувати алгоритми, методи, прийоми та способи розв'язування математичних задач.

ФК-7. Здатність продемонструвати глибокі знання історичних та сучасних тенденцій розвитку математики, вітчизняного та зарубіжного наукового доробку в галузі математики та практичного досвіду його застосування в різноманітних галузях сучасної науки та високотехнологічного виробництва.

3. Програмні результати навчання

ПРН-1. Відтворювати базові знання фундаментальних розділів математики, фізики, використовувати математичні методи в професійній діяльності.

ПРН-5. Розв'язувати задачі різних рівнів складності з основних розділів вищої математики та шкільного курсу математики.

ПРН-10. Виокремлювати компоненти професійної (педагогічної або математичної) задачі, пояснювати їх взаємозв'язки та розробляти, пропонувати різні шляхи розв'язування задачі.

ПРН-11. Виявляти помилки та недоліки в математичних знаннях та вміннях, в логіці міркувань, пояснювати різницю між фактами і наслідками.

ПРН-18. Формулювати задачі математично та символічно, щоб полегшити їх аналіз та розв'язання.

4. Критерії оцінювання

Методи контролю результатів навчання	Максимальна кількість балів та вимоги до їх накопичення
Поточний контроль (відповідь на практичному занятті)	<p style="text-align: center;">5 балів</p> <p><i>5 балів</i> – Розв’язання правильне, супроводжується необхідним повним поясненням і обґрунтуванням, може бути допущена арифметична помилка, яка є наслідком неуважності, і не демонструє незнання математичних законів</p> <p><i>4 бала</i> – Розв’язання супроводжується неповним поясненням, порушено логічно правильний ланцюг міркувань, але відповідь правильна</p> <p><i>3 бала</i> – Завдання розв’язане правильно, але пояснення неповне, пропущені логічні кроки, відсутня чітка відповідь</p> <p><i>2 бала</i> – При розв’язанні зроблені помилкові теоретичні пояснення, наслідком яких є частковий розв’язок</p> <p><i>1 бал</i> – Розв’язання відсутнє, але наведено теоретичні пояснення, формули, необхідні для виконання завдання, є спроба застосування формул до розв’язання</p>
Поточний контроль (реферат, есе, презентація)	<p style="text-align: center;">В сумі 5 балів</p> <p><i>1 бал</i> – Відповідність змісту обраній темі</p> <p><i>1 бал</i> – Логічна структурованість матеріалу, ґрунтовність, повнота і критичність аналізу літератури з теми реферата</p> <p><i>1 бал</i> – Успішність виконання завдання, глибина аналізу зібраного фактичного матеріалу</p> <p><i>1 бал</i> – Літературне, технічне й естетичне оформлення роботи</p> <p><i>1 бал</i> – Публічний захист роботи</p>
Поточний контроль (самостійні контрольні роботи)	<p style="text-align: center;">5 балів</p> <p>Розподіл балів, як за відповідь на практичному занятті</p>
Поточний контроль (підсумкове тестування)	<p style="text-align: center;">5 балів</p> <p>0,5 бала за кожен правильну відповідь на кожне з 10 тестових завдань</p>
Періодичний контроль (ПМК)	<p style="text-align: center;">30 балів</p> <p>5 балів за кожне з 6 завдань (розподіл балів за кожне завдання, як за відповідь на практичному занятті)</p>
Підсумковий контроль (іспит)	<p>100 балів: 20 балів – відповідь на теоретичне питання; 20 балів – розв’язання практичного завдання; 60 балів – відповіді на 30 тестових завдань.</p> <p style="text-align: center;"><i>Відповідь на теоретичне питання</i></p> <p><i>20-18 балів</i> – Повна, розгорнута відповідь з обґрунтованими математичними твердженнями, сформульовано теорему, наведено необхідне доведення, наведено приклади застосування даного</p>

	<p>теоретичного питання з необхідним поясненням</p> <p><i>17-15 балів</i> – Відповідь повна, ґрунтовна, сформульовано теорему, але в доведенні порушено правильний ланцюг міркувань, є приклади</p> <p><i>14-12 балів</i> – Відповідь неповна, часткове обґрунтування, сформульована теорема, але в доведенні порушено правильний ланцюг міркувань, відсутні приклади</p> <p><i>11-9 балів</i> – Теорема сформульована, дано пояснення, наведено приклади її застосування, але відсутнє доведення</p> <p><i>8-6 балів</i> – Сформульовано теорему без пояснень, наведено приклади застосування її до розв’язання задач</p> <p><i>5-3 балів</i> – Сформульовано теорему без пояснень, приклади відсутні</p> <p><i>2-1 бали</i> – Питання висвітлено частково</p> <p style="text-align: center;"><i>Розв’язання практичного завдання</i></p> <p><i>20-18 балів</i> – Завдання розв’язано правильно, при цьому проявляється варіативність мислення, раціональність у виборі способу розв’язання, розв’язання супроводжується необхідним повним поясненням і обґрунтуванням</p> <p><i>17-15 балів</i> – Розв’язання супроводжується необхідним повним поясненням і обґрунтуванням, але допущена арифметична помилка, яка є наслідком не уважності, і не демонструє незнання математичних законів</p> <p><i>14-12 балів</i> – Розв’язання супроводжується неповним поясненням, порушено логічно правильний ланцюг міркувань, але відповідь правильна</p> <p><i>11-9 балів</i> – Завдання розв’язується правильно, але пояснення неповне, пропущені логічні кроки, відсутня чітка відповідь</p> <p><i>8-6 балів</i> – Розв’язання правильне, але без необхідних пояснень і обґрунтування, відсутня чітка відповідь</p> <p><i>5-3 бала</i> – При розв’язанні зроблені помилкові теоретичні пояснення, наслідком яких є частковий розв’язок</p> <p><i>2-1 бал</i> – Розв’язання відсутнє, але наведено теоретичні пояснення, формули, необхідні для виконання завдання, є спроба застосування формул до розв’язання</p> <p style="text-align: center;"><i>Відповіді на тестові завдання</i></p> <p>Тестові завдання: 2 бала – відповідь правильна, 0 балів – відповідь неправильна.</p>
--	---

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
74-81	C		
64-73	D	задовільно	
60-63	E		

0-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
------	----	--	--

5. Методи навчання

1. Словесні: лекція, бесіда, пояснення.
2. Наочні: демонстрація, ілюстрація.
3. Практичні: вправи, практичні роботи, дослідні роботи.
4. Проблемні лекції.
5. Розв'язування задач, творчих завдань.
6. Робота в Інтернет.
7. Складання графічних схем. Презентації
8. Робота в малих групах.
9. Семінари-дискусії.
10. Мозкові атаки.

6. Програма навчальної дисципліни

Модуль 1. Гільбертові простори.

Тема 1. Основні поняття теорії лінійних просторів.

Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Підпростір. Лінійна залежність та незалежність векторів. Базис лінійного простору. Приклади базисів. Вимірність. Ізоморфізм лінійних просторів.

Тема 2. Основні поняття теорії гільбертових просторів.

Скалярний добуток векторів. Ортогональність векторів. Норма. Повнота в нормованому просторі. Означення гільбертового простору. Гільбертові простори l_2 та L_2 .

Модуль 2. Лінійні оператори.

Тема 3. Основні поняття теорії лінійних операторів.

Означення лінійного оператора. Приклади операторів. Матриця лінійного оператора. Ядро і ранг оператора. Обернений оператор. Композиція операторів. Означення неперервного оператора. Обмежені та необмежені лінійні оператори.

Тема 4. Спряжені та самоспряжені оператори. Спектр оператора.

Означення спряженого оператора. Самоспряжений оператор. Власні значення. Резольвента лінійного оператора. Спектр оператора.

7. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Лінійні оператори в гільбертових просторах.												
Змістовий модуль 1. Гільбертові простори.												
Тема 1. Основні поняття теорії лінійних просторів.	31	2	4			25	31	4	2			25
Тема 2. Основні поняття теорії гільбертових просторів.	29	2	2			25	29	2	2			25
Разом за змістовим модулем 1	60	4	6			50	60	6	4			50
Змістовий модуль 2. Лінійні оператори.												
Тема 4. Основні поняття теорії лінійних операторів.	31	2	4			25	30	2	1			27
Тема 5. Спряжені та самоспряжені оператори. Спектр оператора.	29	2	2			25	30	2	1			27
Разом за змістовим модулем 2	60	4	6			50	60	4	2			54
Усього годин	120	8	12			100	120	10	6			104

8. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми лекції та питання, що вивчаються	Кількість годин
1	Основні поняття теорії лінійних просторів. Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Підпростір. Базис лінійного простору. Приклади базисів. Вимірність.	2
3	Основні поняття теорії гільбертових просторів. Скалярний добуток векторів. Ортогональність векторів. Норма. Означення гільбертового простору.	2
5	Основні поняття теорії лінійних операторів. Означення лінійного оператора. Приклади операторів. Матриця оператора.	2

	Ядро і ранг оператора. Обернений оператор.	
7	Спряжені та самоспряжені оператори. Спектр оператора. Означення спряженого оператора. Самоспряжений оператор. Власні значення. Спектр лінійного оператора.	2
Разом		8

9. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми та питання, що вивчаються	Форми контролю	Кількість годин
1	Основні поняття теорії лінійних просторів. Основні дії з векторами на площині та в просторі. Властивості лінійних операцій.	усне опитування, письмовий контроль	2
2	Основні поняття теорії лінійних просторів. Перевірка базисності деяких систем векторів. Приклади базисів лінійних просторів.	усне опитування, письмовий контроль	2
3	Основні поняття теорії гільбертових просторів. Знаходження скалярного добутку векторів. Умова ортогональності векторів. Знаходження норми векторів.	усне опитування, письмовий контроль	2
	Підсумковий модульний контроль 1	письмова контрольна робота	
4	Основні поняття теорії лінійних операторів. Перевірка лінійності операторів. Знаходження матриць деяких лінійних операторів.	усне опитування, письмовий контроль	2
5	Основні поняття теорії лінійних операторів. Обернений оператор. Знаходження ядра та рангу деяких операторів.	усне опитування, письмовий контроль	2
6	Спряжені та самоспряжені оператори. Знаходження спряженого оператора. Приклади самоспряжених операторів. Власні значення.	усне опитування, письмовий контроль	2
	Підсумковий модульний контроль 2	письмова контрольна робота	
Разом			12

10. Самостійна робота

Теми для самостійного опрацювання

№ з/П	Теми і перелік питань, що винесені на самостійне вивчення та виконання
1	<i>Перевірка аксіом лінійного простору для деяких множин.</i>
2	<i>Лінійна залежність та незалежність векторів.</i>
3	<i>Ізоморфізм лінійних просторів.</i>
4	<i>Повнота в нормованому просторі.</i>
5	<i>Гільбертові простори l_2 та L_2.</i>
6	<i>Неперевний оператор.</i>
7	<i>Обмежені та необмежені оператори.</i>
8	<i>Самоспряжені необмежені оператори.</i>
9	<i>Резольвента лінійного оператора.</i>
10	<i>Спектр оператора.</i>

11. Методи контролю

1. Усне опитування.
2. Письмовий контроль.
3. Тестування.
4. Звіт про виконання домашніх робіт.
5. Залік.

12. Перелік питань, що виносяться на підсумковий контроль

1. Основні дії з векторами на площині та в просторі.
2. Властивості лінійних операцій.
3. Означення лінійного простору.
4. Приклади лінійних просторів.
5. Лінійний простір \mathbb{R}^n .
6. Базис лінійного простору.
7. Приклади базисів лінійних просторів.
8. Вимірність лінійного простора.
9. Норма у лінійному просторі.
10. Приклади нормованих лінійних просторів.
11. Скалярний добуток векторів.
12. Приклади скалярних добутків векторів.
13. Ортогональність векторів.
14. Означення гільбертового простору.
15. Гільбертові простори l_2 та L_2 .
16. Означення лінійного оператора.
17. Приклади лінійних операторів.

18. Матриця лінійного оператора.
19. Обернений оператор.
20. Композиція лінійних операторів.
21. Означення неперервності лінійного оператора.
22. Обмежені оператори.
23. Необмежені оператори.
24. Приклади необмежених операторів.
25. Власні значення та власні вектори оператора.
26. Спряжені оператори.
27. Самоспряжені оператори.
28. Приклади самоспряжених операторів.
29. Резольвента лінійного оператора.
30. Спектр лінійного оператора.

13. Приклади завдань для поточного і підсумкового контролю

1. Перевірити, чи утворює множина $E = \{(x_1, x_2, 0, -x_2, x_1) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ лінійний простір. Знайти його вимірність і будь-який базис.
2. На площині дано два вектори $\vec{p} = (2; -3)$ і $\vec{q} = (-1; 3)$. Обґрунтуйте, що вони утворюють базис і знайдіть розклад вектора $\vec{r} = (9; 4)$ за цим базисом. Які кути між векторами базиса та цим вектором?
3. Довести, що множина n -мірних векторів, у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю, утворює лінійний підпростір простору \mathbb{R}^n .
4. Знайдіть кут між функціями $f(x) = \sin 2x$ та $g(x) = \cos 3x$ у просторі $C[-\pi; \pi]$ та норми цих функцій.
5. Перевірте, чи буде лінійним оператором $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ заданий формулой відображення $A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$? Якщо так, запишіть матрицю цього оператора в базисах \mathbb{R}^4 : $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 2, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 3, 0)$, $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 4)$ та \mathbb{R}^2 : $\vec{f}_1 = (1, 0)$, $\vec{f}_2 = (0, 2)$.
6. Доведіть, що лінійний оператор $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданий матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ переводить лінійно незалежну систему векторів в лінійно залежну. В який вектор \vec{y} він перетворює вектор $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$? Який ранг цього оператора?

14. Рекомендована література

Основна

1. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: МЦНМО, 1998. – 320 с.
2. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 416 с.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Наука, 1982.

Додаткова

4. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Харьков: Высшая школа, 1977. – 544 с.
5. В. Хатсон, Дж. Пим. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.

15. Методичне забезпечення (на сайті ЦОДТ МДПУ)

1. Робоча програма.
2. Лекції та матеріали до практичних занять і самостійної роботи;
3. Навчальний посібник (*планується у 2022 р.*);
4. Контрольні завдання до практичних занять;
5. Тестові завдання.

16. Сторінка курсу (на сайті ЦОДТ МДПУ)

<http://www.dfn.mdpu.org.ua/course/view.php?id=3762>